Chang's Conjecture

YasudaYasutomo

平成 31 年 3 月

Chang's Conjecture の無矛盾性を示す.

1　無矛盾性

definition 1.1. $\mathfrak{A} = \langle A, R, ...\rangle$ を可算言語の構造で $R \subseteq A$ を満たすとする.

- $\mathfrak{A}$ がタイプ $\langle \kappa, \lambda\rangle$ であるとは，$|A| = \kappa$，$|R| = \lambda$ を満たすときのことをいう.

Löwenheim-Skolem の定理を強めたものを考える.

definition 1.2.

- $\langle \kappa, \lambda\rangle \twoheadrightarrow \langle \mu, \nu\rangle \Leftrightarrow$ 任意のタイプ $\langle \kappa, \lambda\rangle$ $\mathfrak{A}$ において，あるタイプ $\langle \mu, \nu\rangle$ $\mathfrak{B}$ が存在して $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ を満たす.
- $\langle \kappa, \lambda\rangle \twoheadrightarrow \langle \mu, <\nu\rangle \Leftrightarrow$ 任意のタイプ $\langle \kappa, \lambda\rangle$ $\mathfrak{A}$ において，あるタイプ $\langle \mu, \theta\rangle$ $(\theta < \nu)$ $\mathfrak{B}$ が存在して $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}$ を満たす.
- *Chang's Conjecture* とは $\langle \omega_2, \omega_1\rangle \twoheadrightarrow \langle \omega_1, \omega\rangle$ を表す.

remark 1. $\langle \omega_2, \omega_1\rangle \twoheadrightarrow \langle \omega_1, \omega\rangle$ は $\langle \omega_2, \omega_1\rangle \twoheadrightarrow \langle \omega_1, <\omega_1\rangle$ と同値である.

モデル理論的な概念だが実は組み合わせ論的な性質と同値になることがわかる.

definition 1.3. $\beta \longrightarrow [\alpha]^{\gamma}_{\delta, <\eta} \Leftrightarrow$ 任意の $f : [\beta]^{\gamma} \to \delta$ において，ある $H \in [\beta]^{\alpha}$ が存在して $|f\text{''}\,[H]^{\gamma}| < \eta$ を満たす.

theorem 1.4. $\lambda \leq \kappa$，$\omega < \nu \leq \mu \leq \kappa$ とする．以下同値，

1. $\langle \kappa, \lambda\rangle \twoheadrightarrow \langle \mu, <\nu\rangle$
2. $\kappa \longrightarrow [\mu]^{<\omega}_{\lambda, <\nu}$

Proof. ((1) → (2)) $f : [\kappa]^{<\omega} \to \lambda$ を任意にとる．構造 $\mathfrak{A} = \langle \kappa, \lambda, \in, f|[\kappa]^n\rangle_{n\in\omega}$ において仮定より，$H \in [\kappa]^{\mu}$ で $|\lambda \cap H| < \nu$ かつ $\langle H, \lambda \cap H, \in, f|[H]^n\rangle_{n\in\omega} \prec \mathfrak{A}$ となるようなものが取れる．この H は求めるものとなっている.

((2) → (1)) $\mathfrak{A} = \langle A, R, ...\rangle$ をタイプ $\langle \kappa, \lambda\rangle$ とする．$A = \kappa$，$R = \lambda$ としてもよい．$\{h_n \,|\, n \in \omega\}$ を $\mathfrak{A}$ の合成に関して閉じた Skolem 関数の族とする．h_n を $k(n)$-変数関数として $k(n) \leq n$ を満たすとしてよい.

$f : [\kappa]^{<\omega} \to \lambda$ を，

$$f(\xi_1, ...\xi_n) = \begin{cases} h_n(\xi_1, ...\xi_{k(n)}) & (\text{値が} < \lambda \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{o.w.}) \end{cases} \tag{0}$$

と定義する．仮定より $H \in [\kappa]^\mu$ を $|f"[H]^{<\omega}| < \nu$ となるように取れる．$B = \bigcup_{n\in\omega} h_n"[H]^{k(n)}$ とすると $|B| = \mu$ であり，$\lambda \cap B \subseteq f"[H]^{<\omega}$ より $|\lambda \cap B| < \nu$ を満たす．確かに $\langle B, \lambda \cap B, ...\rangle \prec \mathfrak{A}$ となっている． □

definition 1.5. 無限基数 κ が Ramsey $\Leftrightarrow$ $\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}_2$ を満たす．

proposition 1.6. 以下同値

1. κ : Ramsey
2. 任意の $\gamma < \kappa$ において，$\kappa \longrightarrow (\kappa)^{<\omega}_\gamma$ が成り立つ．

Proof. ((2) → (1)) 定義より明らか．

((1) → (2)) 分割 $f : [\kappa]^{<\omega} \to \gamma$ $(\gamma < \kappa)$ を任意に取る．新たに分割 $g : [\kappa]^{<\omega} \to 2$ を次のように定義する．

$$g(\xi_1, ...\xi_n) = \begin{cases} 0 & (n = 2m \wedge f(\xi_1, ...\xi_m) = f(\xi_{m+1}, ...\xi_n) \text{ のとき}) \\ 1 & (\text{o.w.}) \end{cases} \tag{0}$$

κ : Ramsey より，$H \in [\kappa]^\kappa$ を分割 g の homogeneous な集合とする．$n = 2m$ において，$\gamma < \kappa$ より，$s, t \in [H]^m$ で $\max(s) < \min(t)$ かつ $f(s) = f(t)$ なるものが存在する．分割 g の定義より $g(s \cup t) = 0$ となり H の取り方から $g"[H]^n = \{0\}$ が成り立つ．このとき任意の $u, v \in [H]^m$ において，$w \in [H]^m$ が $\max(u), \max(v) < \min(w)$ となるように取れる．H の取り方より $g(u \cup w) = g(v \cup w)$，$g$ の定義より $f(u) = f(v) = f(w)$. ゆえ H は分割 f の homogeneous な集合でもある． □

definition 1.7. 構造 $\mathcal{M}$ において，全順序部分集合 $\langle X, <\rangle$ $(X \subseteq \mathcal{M})$ が構造 $\mathcal{M}$ に対する識別不能列であるとは，任意の論理式 $\phi(v_1, ...v_n)$ と任意の X の列 $x_1 < ... < x_n$ と $y_1 < ... < y_n$ に対して $\mathcal{M} \models \phi[x_1, ..., x_n]$ $\leftrightarrow$ $\mathcal{M} \models \phi[y_1, ..., y_n]$ が成り立つことをいう．

proposition 1.8. 以下同値

1. κ : Ramsey
2. 任意の可算言語の構造 $\mathcal{M}$ で $\kappa \subseteq \mathcal{M}$ なものについて，長さ κ の $\mathcal{M}$ に対する識別不能列 $X \in [\kappa]^\kappa$ が取れる．

Proof. ((1) → (2)) 論理式の数え上げを $\{\phi_n \,|\, n \in \omega\}$ とする：各 ϕ_n は高々自由変数を $v_1, ...v_{k(n)}$ しか持たず $k(n) \leq n$ を満たすとする．

分割 $f : [\kappa]^{<\omega} \to 2$ を次のように定義する．

$$f(\xi_1, ...\xi_n) = \begin{cases} 0 & (\mathcal{M} \models \phi_n[\xi_1, ...\xi_{k(n)}] \text{ のとき}) \\ 1 & (\text{o.w.}) \end{cases} \tag{0}$$

分割 f のサイズ κ の homogeneous な集合 H は $\mathcal{M}$ の識別不能列となっている．

((2) → (1)) 分割 $f : [\kappa]^{<\omega} \to 2$ において，可算言語の構造 $\langle \kappa, \in, f|[\kappa]^n\rangle_{n\in\omega}$ の長さ κ の $\mathcal{M}$ に対する識別不能列 $X \in [\kappa]^\kappa$ は分割 f の homogeneous な集合となっている． □

theorem 1.9. Con(ZFC + $\exists\kappa$: Ramsey) → Con(ZFC + *Chang's Conjecture*)

Proof. κ を Ramsey とする．サイズ κ 未満の半順序による強制によって κ が Ramsey であることは破壊されないため，以下 MA+¬CH を仮定する．半順序 $\mathbb{P}$ を $\mathrm{dom}(p) \subseteq \omega_1 \times \kappa$ かつすべての $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathrm{dom}(p)$ において $p(\langle \alpha, \beta \rangle) \in \beta$ を満たす部分関数でさらに次を満たすようなもの全体の集合とする．

- $|\{\beta \mid \exists \alpha(\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathrm{dom}(p))\}| \leq \omega_1$
- $\sup\{\alpha \mid \exists \beta(\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathrm{dom}(p))\} < \omega_1$

順序は包含の逆で入れる．このとき $\mathbb{P}$ は κ-cc かつ ω_1-閉で κ を ω_2 に潰す．

$p \in \mathbb{P}$ が $p \Vdash f : [\dot{\omega_2}]^{<\omega} \rightarrow \dot{\omega_1}$ を満たすときに，ある p の拡張 p^* と $\mathbb{P}$-name τ が存在して $p^* \Vdash (|f"[\tau]^{<\omega}| \leq \omega \wedge |\tau| = \dot{\omega_1})$ を満たすことを示せばよい．

関係 $R \subseteq ([\kappa]^{<\omega} \times \omega_1 \times \mathbb{P})$ を次のように定める．

- $\langle x, \delta, q \rangle \in R \Leftrightarrow q \leq p \wedge q \Vdash f(\check{x}) = \delta$

$\mathcal{F}$ を V_κ の合成に関して閉じた Skolem 関数の族とする．構造 $\mathcal{M} = \langle V_\kappa, \in, \omega_1, \mathbb{P}, p, R, \mathcal{F} \rangle$ において，κ : Ramsey より $\mathcal{M}$ のサイズ κ の識別不能列 $H \subseteq \kappa$ が取れる．識別不能列 H の前から ω_1 個の元を取り，それの $\mathcal{M}$ での Skolem 閉包の推移的崩壊を $\mathcal{N} = \langle B, \in, ... \rangle$ とする．$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ である．

$B \cap \omega_1$ は可算集合である：まず H の識別不能性から t を n 変数項とし，$\bar{x} < \bar{y} \in {}^nH$ において，$t(\bar{x}) < \omega_1$ ならば $t(\bar{x}) = t(\bar{y})$ である．したがって $B \cap \omega_1$ の任意の元はある n 変数項 t と H の最初の長さ ω の列の有限個の元からなる $\bar{x}$ が存在して $t(\bar{x})$ の形で表せる．構造 $\mathcal{M}$ は可算言語であったから $B \cap \omega_1$ は可算集合である．

$\mathbb{P} \cap B$ は ω_1-cc を満たす：$\mathbb{P} \cap B$ がサイズ ω_1 の反鎖を持つと仮定する．このときある項 t で各 $\bar{x} < \bar{y} \in {}^n(H \cap B)$ において $t(\bar{x})$ と $t(\bar{y})$ が $\mathbb{P} \cap B$ の両立しない元となるようなものが存在する．$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ であったから，初等性より $\mathbb{P}$ はサイズ κ の反鎖を持ち κ-cc であることに矛盾．

初等性より，すべての $x \in B \cap [\kappa]^{<\omega}$ において $D_x = \{q \mid q \leq p \wedge \exists \beta(\beta \in B \cap \omega_1 \wedge q \Vdash f(\check{x}) = \beta)\}$ は $\mathbb{P} \cap B$ において p 以下で稠密．また $|B \cap [\kappa]^{<\omega}| \leq \omega_1$ より MA+¬CH の仮定から $(\mathbb{P} \cap B)$-ジェネリック G が取れる．$B \cap \omega_1$ は可算かつ $\mathbb{P}$ の構成から $\bigcup G \in \mathbb{P}$ が成り立つ．このとき $\bigcup G \leq p$ かつ初等性より $B \cap \kappa = X$ とすると $\bigcup G \Vdash (f"[\check{X}]^{<\omega}$: 可算)．$\mathbb{P}$ は ω_1-閉より X は $V[G]$ においても非可算集合である． □

これによって Chang's conjecture の無矛盾性の強さの上限が巨大基数によって与えられた．

参考文献

[1] A.J.Kanamori,The Higher Infinite,Second Edition. Springer, 2009.

[2] The evolution of large cardinal axioms in set theory, with Menachem Magidor, in: Gert H. Muller and Dana S. Scott, editors, Higher Set Theory (Proceedings, Oberwolfach, Germany 1977), Lecture Notes in Mathematics 669, 99-275. Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[3] K.Kunen 著, 藤田博司訳. 集合論 独立性証明への案内. 日本評論社,2008.